1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases}(k+2)x+ky=1\\ -x+y=k\end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k\in\mathbb{R}$; $k\neq -1$ $\exists!$ sol.: $((1-k)/2,(k+1)/2)$; $k=-1$ $S=\{(t,t-1)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\}$ — **(pt.4)**

Posto $k=-1$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S)=\mathbb{R}^2$ quindi $\dim\mathcal{L}(S)=2$ e una sua base è quella canonica. — **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k\neq 1$ A_k è diagonalizzabile; per $k=-1$ A_{-1} è ortogonalmente diagonalizzabile — **(pt.4)**

Posto $k=-1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_{-1}, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ — **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi: 2x+2y-3z=5$ e la retta $r: x+y=z-1=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $2x+2y-3z=-3$ — **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P=(2,1,3)$.

  Risposta $\begin{cases}2x+2y-3z=-3\\ x-y=1\end{cases}$ — **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: x^2+ky^2-2xy+2x+k=0$, dove $k\in\mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k=0\bigvee k=2$ — **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k=1$, asse: $x-y=-1/2$ — **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: x^2-y^2-2xy+2z=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty: \begin{cases}x_4=0\\ x_1^2-2x_1x_2-x_2^2=0\end{cases}$ si riduce in $t_1\bigcup t_2$ dove $t_1: \begin{cases}x_4=0\\ (\sqrt{2}-1)x_1-x_2=0\end{cases}$ e $t_2: \begin{cases}x_4=0\\ (\sqrt{2}+1)x_1+x_2=0\end{cases}$ — **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\bigcap\beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. — **(pt.2)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases}(k+2)x+y=0\\(k+1)x+2y=k+3\end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k\in\mathbb{R}$; $k\neq -3$ $\exists!$ sol.: $(-1,k+2)$; $k=-3$ $S=\{(t,t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k=-3$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S)=S=\{(t,t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\}$ ha dimensione 1; una base è $\mathcal{B}=((1,1))$ **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k\neq -2$ A_k è diagonalizzabile; per $k=0$ A_0 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.4)**

Posto $k=0$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_0, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi: 2x+2y-3z=0$ e la retta $r: x+y+1=z-2=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $2x+2y-3z=-8$ **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P=(5,1,3)$.

  Risposta $\begin{cases}2x+2y-3z=3\\x-y=4\end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: x^2+2ky^2-4xy+2x+k=0$, dove $k\in\mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k=0\bigvee k=3$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k=2$, asse: $5x-10y+1=0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: x^2-2y^2-2xy-2z=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty: \begin{cases}x_4=0\\x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2=0\end{cases}$ si riduce in $t_1\bigcup t_2$ dove $t_1: \begin{cases}x_4=0\\(\sqrt{3}-1)x_1-2x_2=0\end{cases}$ e $t_2: \begin{cases}x_4=0\\(\sqrt{3}+1)x_1+2x_2=0\end{cases}$ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\bigcap\beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases}(k+3)x+ky=k+2\\ -3x=-2\end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k\in\mathbb{R}$; $k\neq 0$ $\exists!$ sol.: $(2/3,1/3)$; $k=0$ $S=\{(2/3,t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k=0$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S)=\mathbb{R}^2$ quindi $\dim\mathcal{L}(S)=2$ e una sua base è quella canonica. **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k\neq 3$ A_k è diagonalizzabile; per $k=-3$ A_{-3} è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.4)**

Posto $k=-3$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_{-3}, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi: 3x-2y-2z=5$ e la retta $r: y+z=x-1=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $3x-2y-2z=3$ **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P=(3,1,2)$.

  Risposta $\begin{cases}3x-2y-2z=3\\ y-z=-1\end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: x^2+ky^2+4xy+2x+k=0$, dove $k\in\mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k=0\bigvee k=5$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k=4$, asse: $5x+10y+1=0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: 4x^2-4y^2-4xy+z=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty: \begin{cases}x_4=0\\ x_1^2-x_1x_2-x_2^2=0\end{cases}$ si riduce in $t_1\bigcup t_2$ dove $t_1: \begin{cases}x_4=0\\ (\sqrt{5}-1)x_1-2x_2=0\end{cases}$ e $t_2: \begin{cases}x_4=0\\ (\sqrt{5}+1)x_1+2x_2=0\end{cases}$ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\bigcap\beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} kx + (k-2)y = 1 \\ -x + y = k - 2 \end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$ $\exists!$ sol.: $((3-k)/2, (k-1)/2)$; $k = 1$ $S = \{(t, t-1) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k = 1$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2$ quindi $\dim\mathcal{L}(S) = 2$ e una sua base è quella canonica. **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k \neq 3$ A_k è diagonalizzabile; per $k = 1$ A_1 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.4)**

Posto $k = 1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_1, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi : 2x + 2y - 3z = 7$ e la retta $r : x + y = z = 1$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $2x + 2y - 3z = -1$ **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P = (-2, 1, 3)$.

  Risposta $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = -11 \\ x - y = -3 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + (k-1)y^2 - 2xy + 2y + k - 2 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k = 1 \bigvee k = 3$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k = 2$, asse: $x - y = 1/2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : y^2 - z^2 - 2yz + 2x = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 = 0 \end{cases}$ si riduce in $t_1 \bigcup t_2$ dove $t_1 : \begin{cases} x_4 = 0 \\ (\sqrt{2} - 1)x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} x_4 = 0 \\ (\sqrt{2} + 1)x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \bigcap \beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases}(k+1)x+y=0\\ kx+2y=k+2\end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq -2$ $\exists !$ sol.: $(-1, k+1)$; $k=-2$ $S=\{(t,t)\in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.4)**

Posto $k=-2$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S)=S=\{(t,t)\in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1; una base è $\mathcal{B}=((1,1))$ ______ **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k \neq -1$ A_k è diagonalizzabile; per $k=1$ A_1 è ortogonalmente diagonalizzabile ______ **(pt.4)**

Posto $k=1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_1, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi: 2x+2y-3z=10$ e la retta $r: x+y-1=z=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $2x+2y-3z=2$ ______ **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P=(6,1,3)$.

  Risposta $\begin{cases}2x+2y-3z=5\\ x-y=5\end{cases}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: x^2+2(k-1)y^2-4xy+4x-4y+k+2=0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k=1 \bigvee k=4$ ______ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k=3$, asse: $5x-10y+6=0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: y^2-2z^2-2yz-2x=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty: \begin{cases}x_4=0\\ x_2^2-2x_2x_3-2x_3^2=0\end{cases}$ si riduce in $t_1 \bigcup t_2$ dove $t_1: \begin{cases}x_4=0\\ (\sqrt{3}-1)x_2-2x_3=0\end{cases}$ e $t_2: \begin{cases}x_4=0\\ (\sqrt{3}+1)x_2+2x_3=0\end{cases}$ ______ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\bigcap\beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} kx + (k-3)y = k-1 \\ -3x = -2 \end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 3$ $\exists!$ sol.: $(2/3, 1/3)$; $k = 3$ $S = \{(2/3, t) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.4)**

Posto $k = 3$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2$ quindi dim$\mathcal{L}(S) = 2$ e una sua base è quella canonica. ______ **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k \neq 6$ A_k è diagonalizzabile; per $k = 0$ A_0 è ortogonalmente diagonalizzabile ______ **(pt.4)**

Posto $k = 0$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_0, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi : 2x - 3y + 2z = 5$ e la retta $r : x + z = y - 1 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $2x - 3y + 2z = -3$ ______ **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P = (2, 3, 1)$.

  Risposta $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ x - z = 1 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + (k-2)y^2 - 2xy - 2x + 4y + k - 2 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k = 2 \bigvee k = 4$ ______ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k = 3$, asse: $x - y = 3/2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : 4y^2 - 4z^2 - 4yz + x = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2^2 - x_2x_3 - x_3^2 = 0 \end{cases}$ si riduce in $t_1 \bigcup t_2$ dove $t_1 : \begin{cases} x_4 = 0 \\ (\sqrt{5} - 1)x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} x_4 = 0 \\ (\sqrt{5} + 1)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \bigcap \beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases}(k-1)x+(k-3)y=1\\ -x+y=k-3\end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 2$ $\exists!$ sol.: $((4-k)/2, (k-2)/2)$; $k=2$ $S=\{(t, t-1) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k=2$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S)=\mathbb{R}^2$ quindi $\dim\mathcal{L}(S)=2$ e una sua base è quella canonica. **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k \neq 4$ A_k è diagonalizzabile; per $k=2$ A_2 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.4)**

Posto $k=2$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_2, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi: 2x+2y-3z=3$ e la retta $r: x+y+1=z-1=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $2x+2y-3z=-5$ **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P=(4,1,3)$.

  Risposta $\begin{cases}2x+2y-3z=1\\ x-y=3\end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: (k-3)x^2+y^2-2xy+2x+k-4=0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k=3 \bigvee k=5$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k=4$, asse: $x-y=-1/2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: y^2-z^2+6yz-2x=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty: \begin{cases}x_4=0\\ x_2^2+6x_2x_3-x_3^2=0\end{cases}$ si riduce in $t_1 \bigcup t_2$ dove
$t_1: \begin{cases}x_4=0\\ x_2+(3+\sqrt{10})x_3=0\end{cases}$ e $t_2: \begin{cases}x_4=0\\ x_2+(3-\sqrt{10})x_3=0\end{cases}$ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\bigcap\beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases}(k+3)x+y=0\\(k+2)x+2y=k+4\end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k\in\mathbb{R}$; $k\neq -4$ $\exists!$ sol.: $(-1,k+3)$; $k=-4$ $S=\{(t,t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k=-4$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S)=S=\{(t,t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\}$ ha dimensione 1; una base è $\mathcal{B}=((1,1))$ **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k\neq -3$ A_k è diagonalizzabile; per $k=-1$ A_{-1} è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.4)**

Posto $k=-1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_{-1}, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi: 2x+2y-3z=7$ e la retta $r: x+y+2=z+1=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $2x+2y-3z=-1$ **(pt.2)**
- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P=(7,1,3)$.

  Risposta $\begin{cases}2x+2y-3z=7\\x-y=6\end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: 2(-k-1)x^2+y^2-4xy-4x+4y-k+2=0$, dove $k\in\mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k=-1\bigvee k=-4$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k=-3$, asse: $10x-5y-6=0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: 2y^2-z^2+6yz+2x=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty: \begin{cases}x_4=0\\2x_2^2+6x_2x_3-x_3^2=0\end{cases}$ si riduce in $t_1\bigcup t_2$ dove $t_1: \begin{cases}x_4=0\\2x_2+(3+\sqrt{11})x_3=0\end{cases}$ e $t_2: \begin{cases}x_4=0\\2x_2+(3-\sqrt{11})x_3=0\end{cases}$ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\bigcap\beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 8.02.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases}(k+1)x+(k-2)y=k\\ -3x=-2\end{cases}$. Se ne discuta, al variare di $k\in\mathbb{R}$, la compatibilità e se ne determinino, quando è possibile, le soluzioni.

Risposta compatibile $\forall k\in\mathbb{R}$; $k\neq 2$ $\exists!$ sol.: $(2/3,1/3)$; $k=2$ $S=\{(2/3,t)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

Posto $k=2$ e detto S l'insieme delle soluzioni del sistema, si determini la copertura lineare $\mathcal{L}(S)$, la sua dimensione e una sua base.

Risposta $\mathcal{L}(S)=\mathbb{R}^2$ quindi dim$\mathcal{L}(S)=2$ e una sua base è quella canonica. **(pt.3)**

Si determinino i valori di k per i quali A_k, la matrice incompleta del sistema, risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta per $k\neq 5$ A_k è diagonalizzabile; per $k=-1$ A_{-1} è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.4)**

Posto $k=-1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_{-1}, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $P'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano $\pi: 3x-2y-2z=-5$ e la retta $r: y+z=x-1=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane:

- del piano π', se esiste, parallelo a π e contenente r;

  Risposta $3x-2y-2z=3$ **(pt.2)**

- della retta t parallela a π, ortogonale ad r e passante per $P=(0,0,7)$.

  Risposta $\begin{cases}3x-2y-2z=-14\\ y-z=-7\end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: x^2-(k+2)y^2-2xy+2y-k-3=0$, dove $k\in\mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k\in\mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere;
  Risposta $k=-2\bigvee k=-4$ **(pt.2)**
- $\mathcal{C}_k$ è una parabola. In tal caso, qual è il suo asse?
  Risposta $k=-3$, asse: $x-y=1/2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}: y^2-z^2+3yz-x=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane della conica impropria $\mathcal{C}_\infty$ di $\mathcal{Q}$ e, nel caso $\mathcal{C}_\infty$ sia riducibile, delle rette componenti.

Risposta Si tratta di un paraboloide iperbolico; $\mathcal{C}_\infty: \begin{cases}x_4=0\\ x_2^2+3x_2x_3-x_3^2=0\end{cases}$ si riduce in $t_1\bigcup t_2$ dove $t_1: \begin{cases}x_4=0\\ 2x_2+(3+\sqrt{13})x_3=0\end{cases}$ e $t_2: \begin{cases}x_4=0\\ 2x_2+(3-\sqrt{13})x_3=0\end{cases}$ **(pt.4)**

Si determini, se esiste, un piano (reale) β tale che la conica $\mathcal{C}=\mathcal{Q}\bigcap\beta$ sia un'ellisse. Motivare la risposta.

Risposta Se esistesse un piano come β, la sua retta impropria (retta reale) dovrebbe intersecare le due rette (reali) in cui si riduce $\mathcal{C}_\infty$ in una coppia di punti immaginari e coniugati, e questo è ovviamente impossibile. **(pt.2)**