UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 0 & k^2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3-4k & 1 & -2k^2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k-1 \\ 2k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.
Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
Risposta Il sistema è compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$. $k = 0$ ∞^2 soluzioni. $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni. **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S_1 delle soluzioni di $A_1 X = B_1$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $S_1 = \{(x, 1-3x, -2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, S_1 non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_1 X = B_1$ non è omogeneo **(pt.3)**

- $\mathcal{L}(S_1)$ e una sua base.

  Risposta $\mathcal{L}(S_1) = \{(x, y-3x, -2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1,-3,-2),(0,1,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2k & k-3 \\ 0 & k+3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2k$, $k+3$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determini, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste P poiché la matrice A_1 non è simmetrica **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{R})$ si determinino, se possibile, un sistema S di generatori costituito da tre vettori ed un sistema S' libero costituito da tre vettori. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste S poiché $dim M_2(\mathbb{R}) = 4$. $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino, se possibile, due sottospazi U e W, in somma diretta tra loro, tali che $dimU = dimW = 2$. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esistono U e W poiché risulterebbe $dim(U+W) = 4$ con $U+W$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si considerino la base $B = ((1,2),(-1,1))$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si determini la base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B a B'.

Risposta $B' = ((1,5),(-3,3))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini se possibile un complemento diretto di $U = \{(x+y, y+z, x+y, y+z) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ avente dimensione 1. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste un complemento diretto di U di dimensione 1. Infatti, poiché siamo in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e $dimU = 2$, ogni suo complemento diretto deve avere dimensione 2 **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Si stabilisca, motivando la risposta, quante soluzioni reali può avere l'equazione $3x^5 - 2x^3 + kx^2 + 1 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.
Risposta Una, tre o cinque, poiché se un'equazione a coefficienti reali ammette una soluzione complessa, ammette anche la sua complessa coniugata **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2k & k^2 & 0 \\ 6+2k & k^2 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 0 \\ 4k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.
Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
Risposta Il sistema è compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$. $k = 0$ ∞^2 soluzioni. $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni. ______ **(pt.3)**

Posto $k = 2$ si determinino:

- l'insieme S_2 delle soluzioni di $A_2X = B_2$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $S_2 = \{(x, -x, 3-3x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, S_2 non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_2X = B_2$ non è omogeneo ______ **(pt.3)**

- $\mathcal{L}(S_2)$ e una sua base.

  Risposta $\mathcal{L}(S_2) = \{(x, -x, 3y-3x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1, -1, -3), (0, 0, 1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3k+3 & k+2 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $3k+3$, $k-1$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq -2$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determini, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste P poiché la matrice A_1 non è simmetrica ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^5(\mathbb{R})$ si determinino, se possibile, un sistema S di generatori costituito da quattro vettori ed un sistema S' libero costituito da quattro vettori. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste S poiché $dim\mathbb{R}^5(\mathbb{R}) = 5$. $S' = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $M_2(\mathbb{R})$ si determinino, se possibile, due sottospazi U e W, in somma diretta tra loro, tali che $dimU = 3$, $dimW = 2$. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esistono U e W poiché risulterebbe $dim(U + W) = 5$ con $U + W$ sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si considerino la base $B = ((2, -1), (0, 3))$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si determini la base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B a B'.

Risposta $B' = ((4, 1), (-2, 4))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini se possibile un complemento diretto di $U = \{(x + 2y + z, y - 2z, x, y + z) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ avente dimensione 2. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste un complemento diretto di U di dimensione 2. Infatti, poiché siamo in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e $dimU = 3$, ogni suo complemento diretto deve avere dimensione 1 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Si stabilisca, motivando la risposta, quante soluzioni reali può avere l'equazione $4x^3 - kx + 6 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.
Risposta Una o tre, poiché se un'equazione a coefficienti reali ammette una soluzione complessa, ammette anche la sua complessa coniugata ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4k-3 & -1 & 2k^2 \\ 2k & 0 & k^2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2k-1 \\ 1-2k \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.
Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
Risposta Il sistema è compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$. $k = 0$ ∞^2 soluzioni. $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni. ______ **(pt.3)**
Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme S_{-1} delle soluzioni di $A_{-1}X = B_{-1}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $S_{-1} = \{(x, -3-3x, 2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, S_{-1} non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-1}X = B_{-1}$ non è omogeneo ______ **(pt.3)**
- $\mathcal{L}(S_{-1})$ e una sua base.

  Risposta $\mathcal{L}(S_{-1}) = \{(x, -3y-3x, 2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1, -3, 2), (0, 1, 0))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k^2-1 & 2k+1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta k, $2k+1$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq -1$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determini, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste P poiché la matrice A_{-2} non è simmetrica ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^{3,2}(\mathbb{R})$ si determinino, se possibile, un sistema S di generatori costituito da cinque vettori ed un sistema S' libero costituito da cinque vettori. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste S poiché $dim\mathbb{R}^{3,2}(\mathbb{R}) = 6$. $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determinino, se possibile, due sottospazi U e W, in somma diretta tra loro, tali che $dimU = dimW = 2$. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esistono U e W poiché risulterebbe $dim(U+W) = 4$ con $U+W$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. _ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si considerino la base $B = ((2,3), (1,-1))$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Si determini la base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B a B'.

Risposta $B' = ((1,-1), (2,-7))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini se possibile un complemento diretto di $U = \{(x+2z, y+z, x+y+3z, y+z) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ avente dimensione 1. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste un complemento diretto di U di dimensione 1. Infatti, poiché siamo in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e $dimU = 2$, ogni suo complemento diretto deve avere dimensione 2 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Si stabilisca, motivando la risposta, quante soluzioni reali può avere l'equazione $2x^5 + kx^4 - 3x^2 + (k+2) = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.
Risposta Una, tre o cinque, poiché se un'equazione a coefficienti reali ammette una soluzione complessa, ammette anche la sua complessa coniugata ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2014

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 2k & 0 \\ k^2 & 2k-6 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-4k \\ 2k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.
Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni $k \in \mathbb{R}$. $k = 0$ ∞^2 soluzioni. $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni. **(pt.3)**

Posto $k = -2$ si determinino:

- l'insieme S_{-2} delle soluzioni di $A_{-2}X = B_{-2}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $S_{-2} = \{(x, x, -3x-5) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, S_{-2} non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-2}X = B_{-2}$ non è omogeneo **(pt.3)**

- $\mathcal{L}(S_{-2})$ e una sua base.

  Risposta $\mathcal{L}(S_{-2}) = \{(x, x, -3x-5y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $B = ((1,1,-3),(0,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & k^2-1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $k+1$, $2k$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

Posto $k = 4$ si determini, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste P poiché la matrice A_4 non è simmetrica **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determinino, se possibile, un sistema S di generatori costituito da tre vettori ed un sistema S' libero costituito da tre vettori. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste S poiché $dim\mathbb{R}^4(\mathbb{R}) = 4$. $S' = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $M_2(\mathbb{R})$ si determinino, se possibile, due sottospazi U e W, in somma diretta tra loro, tali che $dimU = 3$, $dimW = 2$. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esistono U e W poiché risulterebbe $dim(U+W) = 5$ con $U+W$ sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si considerino la base $B = ((1,4),(2,-1))$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Si determini la base B' tale che A sia la matrice del cambiamento di base da B a B'.

Risposta $B' = ((-1,5),(1,13))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini se possibile un complemento diretto di $U = \{(x+y, x, z, x+2z) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ avente dimensione 2. In caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste un complemento diretto di U di dimensione 2. Infatti, poiché siamo in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e $dimU = 3$, ogni suo complemento diretto deve avere dimensione 1 **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Si stabilisca, motivando la risposta, quante soluzioni reali può avere l'equazione $6x^3 + kx^2 - 5 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

Risposta Una o tre, poiché se un'equazione a coefficienti reali ammette una soluzione complessa, ammette anche la sua complessa coniugata **(pt.3)**