A

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1$^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2k \\ 2 & k & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** $k = 1$ il sistema non è compatibile, $k \neq 1$ il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme $S_{-1}$ delle soluzioni di $A_{-1}X = B_{-1}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_{-1} = \{(-1, -1 - a, a, -1/2) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_{-1}$ non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-1}X = B_{-1}$ non è omogeneo ______ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_{-1})$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((-1, -1, 0, -1/2), (0, -1, 1, 0))$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1+k & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} k^2 & k+1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $k = 1, 2$ ______ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 0$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$; $k = 0$ $\dim U + W_k = 3$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $\nexists k$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2), (0, 1, -3, 1))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2), (0, 1, -3, 1))$, $\dim U = 3$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(-5a, 5a, 2a, a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (0, 0, 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}), (-1/\sqrt{22}, 1/\sqrt{22}, -4/\sqrt{22}, -2/\sqrt{22}))$ ______ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (0, 2, -5, 0)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(\sqrt{2}, -\sqrt{5}, \sqrt{22})$ ______ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;
  **Risposta** $k, 1, -1$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;
  **Risposta** $k \neq 1, -1$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.
  **Risposta** $k \neq -1$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_1$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

B

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 1$^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & 1 \\ 4 & -k & 0 & 2 \\ k & -1 & 2 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** $k = \pm 2$ il sistema non è compatibile, $k \neq \pm 2$ il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- l'insieme $S_0$ delle soluzioni di $A_0X = B_0$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_0 = \{(-1, 2a, a, 2) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_0$ non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_0X = B_0$ non è omogeneo ______ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_0)$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((-1, 0, 0, 2), (0, 2, 1, 0))$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2k & 1 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+2 & 1 \\ k-2 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} 2k+2 & k \\ 1 & k-2 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 2, 3$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$; $k = 3$ $\dim U + W_k = 3$ e $\dim U \bigcap W_k = 2$; $k = 2$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 0$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $k = 2$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((2, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (3, 1, 0, 2))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((2, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (3, 1, 0, 2))$, $\dim U = 3$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(2a, 4a, -5a, -5a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0, 0), (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}))$ ______ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (1, -3, 0, -2)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(\sqrt{5}, \sqrt{2}, -\sqrt{7})$ ______ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;

  **Risposta** $k, 1, 2$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;

  **Risposta** $k \neq 1, 2$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.

  **Risposta** $k \neq 1$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_2$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

$\boxed{\text{C}}$

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 1 & -1 & k \\ -1 & k & 2k & 4 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** Il sistema è compatibile, $\forall k \in \mathbb{R}$ e ammette $\infty^1$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- l'insieme $S_0$ delle soluzioni di $A_0X = B_0$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_0 = \{(0, a, a, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_0$ è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_0X = B_0$ è omogeneo __ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_0)$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((0, 1, 1, 0))$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3+2k & 1 \\ 0 & 2+k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ k & 2 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} k^2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $k = -2, 1$ ______ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 1$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$; $k = 1$ $\dim U + W_k = 3$ e $\dim U \bigcap W_k = 2$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $\nexists k$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (-2, 3, 0, 4))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = (((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (-2, 3, 0, 4))$, $\dim U = 3$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(3a, 2a, -5a, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0), (0, 0, 0, 1), (-7/\sqrt{114}, 8/\sqrt{114}, -1/\sqrt{114}, 0))$ ______ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (-10, 20, 2, -1)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(4\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{114})$ ______ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -k & -3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;
  **Risposta** $k, -3, 3$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;
  **Risposta** $k \neq \pm 3$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.
  **Risposta** $k \neq 3$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = -3$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_{-3}$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

D

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k-1 & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & 2k+2 & 1 \\ k+1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** $k = 0$ il sistema non è compatibile, $k \neq 0$ il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determinino:

- l'insieme $S_{-2}$ delle soluzioni di $A_{-2}X = B_{-2}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_{-2} = \{(-1-a, a, -1/2, -1) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_{-2}$ non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-2}X = B_{-2}$ non è omogeneo **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_{-2})$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((2, 0, 1, 2), (-1, 1, 0, 0))$ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 1 \\ k-1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} (k-1)^2 & k \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $k = 2, 3$ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 1$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$; $k = 1$ $\dim U + W_k = 3$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $\nexists k$ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 0, 0, 1), (0, 1, -2, 0), (1, -3, 1, 0))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((1, 0, 0, 1), (0, 1, -2, 0), (1, -3, 1, 0))$, $\dim U = 3$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^{\perp} = \{(5a, 2a, a, -5a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 0), (1/\sqrt{22}, -4/\sqrt{22}, -2/\sqrt{22}, -1/\sqrt{22}))$ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (2, 5, 0, 4)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(3\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{22})$ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;
  **Risposta** $k, -2, 2$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;
  **Risposta** $k \neq \pm 2$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.
  **Risposta** $k \neq 2$ **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_{-2}$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

E

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 1 & 0 \\ -1-k & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** $k = -3, +1$ il sistema non è compatibile, $k \neq -3, +1$ il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme $S_{-1}$ delle soluzioni di $A_{-1}X = B_{-1}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_{-1} = \{(2a, a, 2, -1) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_{-1}$ non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-1}X = B_{-1}$ non è omogeneo ______ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_{-1})$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((2, 1, 0, 0), (0, 0, 2, -1))$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2k-2 & 1 \\ 0 & -k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+1 & 1 \\ k-3 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} 2k & k-1 \\ 1 & k-3 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 3, 4$ dim $U + W_k = 4$ e dim $U \bigcap W_k = 1$; $k = 3$ dim $U + W_k = 4$ e dim $U \bigcap W_k = 0$; $k = 4$ dim $U + W_k = 3$ e dim $U \bigcap W_k = 2$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $k = 3$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((0, -1, 0, 2), (-1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 3))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((0, -1, 0, 2), (-1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 3))$, dim $U = 3$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(5a, -4a, 5a, -2a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((0, -1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5}), (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}))$ ______ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (-1, 3, 3, -1)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \sqrt{7})$ ______ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & k & 4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;
  **Risposta** $k, 2, 4$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;
  **Risposta** $k \neq 2, 4$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.
  **Risposta** $k \neq 2$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = 4$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_4$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

F

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## **Algebra e Geometria** - $1^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k+1 & 2k+2 \\ k+1 & 2k+2 & 4 & -1 \\ k+1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** Il sistema è compatibile, $\forall k \in \mathbb{R}$ e ammette $\infty^1$ soluzioni **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme $S_{-1}$ delle soluzioni di $A_{-1}X = B_{-1}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_{-1} = \{(a, a, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_{-1}$ è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-1}X = B_{-1}$ è omogeneo **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_{-1})$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((1, 1, 0, 0))$ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2k+1 & 1 \\ 0 & 1+k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ k-1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} (k-1)^2 & k-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $k = -1, 2$ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 2$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$; $k = 2$ $\dim U + W_k = 3$ e $\dim U \bigcap W_k = 2$ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $\nexists k$ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (3, 0, 4, -2))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (3, 0, 4, -2))$, $\dim U = 3$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(2a, -5a, 0, 3a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}), (0, 0, 1, 0), (8/\sqrt{114}, -1/\sqrt{114}, 0, -7/\sqrt{114}))$ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (9, 0, 7, -6)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(\sqrt{3}, 7, \sqrt{114})$ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -18 & 5 & 0 \\ 3 & k & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;
  **Risposta** $k, -1, 5$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;
  **Risposta** $k \neq -1, 5$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.
  **Risposta** $k \neq 5$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_{-1}$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

G

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -k-2 & 0 & 1 & k+2 \\ 0 & 2k+4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & k+2 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+3 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** $k = -1$ il sistema non è compatibile, $k \neq -1$ il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = -3$ si determinino:

- l'insieme $S_{-3}$ delle soluzioni di $A_{-3}X = B_{-3}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_{-3} = \{(a, -1/2, -1-a, -1) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_{-3}$ non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-3}X = B_{-3}$ non è omogeneo ______ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_{-3})$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((1,0,-1,0),(0,1,2,2))$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2+k & 1 \\ k+1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} (k+1)^2 & k+2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $k = 0, 1$ ______ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq -1$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$; $k = -1$ $\dim U + W_k = 3$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $\nexists k$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((0,0,1,1),(1,-2,0,0),(-3,1,0,1))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((0,0,1,1),(1,-2,0,0),(-3,1,0,1))$, $\dim U = 3$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(2a, a, -5a, 5a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{5},-2/\sqrt{5},0,0),(-4/\sqrt{22},-2/\sqrt{22},-1/\sqrt{22},1/\sqrt{22}))$ ______ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (-6,2,-3,-1)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{5}, \sqrt{22})$ ______ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & k & -4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;

  **Risposta** $k, -4, 4$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;

  **Risposta** $k \neq \pm 4$ ______ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.

  **Risposta** $k \neq 4$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = -4$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_{-4}$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

H

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -k-2 & 4 \\ 2 & k+2 & -1 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k+2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** $k = 0, -4$ il sistema non è compatibile, $k \neq 0, -4$ il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determinino:

- l'insieme $S_{-2}$ delle soluzioni di $A_{-2}X = B_{-2}$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_{-2} = \{(a, 2, 2a, -1) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_{-2}$ non è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_{-2}X = B_{-2}$ non è omogeneo **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_{-2})$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((1, 0, 2, 0), (0, 2, 0, -1))$ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2k+2 & 1 \\ 0 & -k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+3 & 1 \\ k-1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} 2k+4 & k+1 \\ 1 & k-1 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 1, 2$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 1$; $k = 2$ $\dim U + W_k = 3$ e $\dim U \bigcap W_k = 2$; $k = 1$ $\dim U + W_k = 4$ e $\dim U \bigcap W_k = 0$ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $k = 1$ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((0, 2, 0, -1), (-1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, 1))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((0, 2, 0, -1), (-1, 0, 1, 0), (2, 3, 0, 1))$, $\dim U = 3$ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(-5a, 2a, -5a, 4a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((0, 2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}), (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 1/\sqrt{7}, 2/\sqrt{7}))$ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (0, -3, -2, -1)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(-\sqrt{5}, -\sqrt{2}, -\sqrt{7})$ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & k & 6 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;
  **Risposta** $k, 3, 6$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;
  **Risposta** $k \neq 3, 6$ **(pt.1)**

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.
  **Risposta** $k \neq 3$ **(pt.2)**

Posto $k = 6$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_6$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

I

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ test - 6/11/2013

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & k-1 & 1 & 2k-2 \\ 2k-2 & 4 & k-1 & -1 \\ 0 & 1 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

**Risposta** Il sistema è compatibile, $\forall k \in \mathbb{R}$ e ammette $\infty^1$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme $S_1$ delle soluzioni di $A_1 X = B_1$ e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;

  **Risposta** $S_1 = \{(a, 0, a, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$, $S_1$ è un sottospazio vettoriale poiché il sistema $A_1 X = B_1$ è omogeneo ______ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S_1)$.

  **Risposta** $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0))$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2k+5 & 1 \\ 0 & 3+k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ k+1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ e la matrice $M = \begin{pmatrix} (k+1)^2 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $M$ appartiene ad $U$.

**Risposta** $k = -3, 0$ ______ **(pt.3)**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di $U + W_k$ e di $U \bigcap W_k$;

  **Risposta** $k \neq 0$ dim $U + W_k = 4$ e dim $U \bigcap W_k = 1$; $k = 0$ dim $U + W_k = 3$ e dim $U \bigcap W_k = 2$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k$, se esistono, per i quali la somma $U + W_k$ è diretta.

  **Risposta** $\nexists k$ ______ **(pt.1)**

**ESERCIZIO 3.** In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dato il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (3, 4, 0, -2))$ si determinino:

- una base $B$ di $U$ e la sua dimensione;

  **Risposta** $B = ((1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (3, 4, 0, -2))$, dim $U = 3$ ______ **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $U$;

  **Risposta** $U^\perp = \{(2a, 0, -5a, 3a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base $B'$ di $U$ ottenuta ortonormalizzando $B$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  **Risposta** $B' = ((1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (0, 1, 0, 0), (8/\sqrt{114}, 0, -1/\sqrt{114}, -7/\sqrt{114}))$ ______ **(pt.3)**

- le componenti di $v = (-9, -2, 0, 6)$ rispetto alla base $B'$.

  **Risposta** $(-\sqrt{3}, -2, -\sqrt{114})$ ______ **(pt.3)**

**ESERCIZIO 4.** In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -9 & k & 3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di $A_k$;
  **Risposta** $k, 2, 3$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A_k$ sono tutti distinti;
  **Risposta** $k \neq 2, 3$ ______ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.
  **Risposta** $k \neq 2$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = 3$ si determino una matrice diagonale $D$ simile ad $A_3$ e la relativa matrice diagonalizzante $P$.

**Risposta** $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**