UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq -2$; $k \neq -2, 1$, soluz. unica, $k = 1$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione della retta r rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano π rappresentato dalla terza equazione.

  Risposta $k \neq -2, 1$, r, π incidenti, $k = -2$, r, π paralleli e disgiunti, $k = 1$, $r \subseteq \pi$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k-3 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 3$ si determini una matrice diagonale D simile ad A_3 e, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio

$$W = \{(a+b+3c, b+2c+d, a-b-c-2d, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio W.

  Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, -1, 0))$ ______ **(pt.2)**

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di W.

  Risposta 2 ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0$ e se ne determinino il centro e il fascio dei diametri.

Risposta Iperbole, $C = (1, -1)$, $\lambda(x + y) + \mu(x - 1) = 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ______ **(pt.3)**

Si determinino le coordinate del polo della retta $r : \ x - y - 2 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

Risposta $P_\infty = [(1, -2, 0)]$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2xy - z^2 + 4y + 1 = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico ______ **(pt.2)**

Si riconosca la sezione della quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi : \ x + y = 0$, precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Iperbole ______ **(pt.2)**

Si determini un'equazione cartesiana del piano α passante per $P = (0, 0, 1)$ tale che la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia riducibile.

Risposta $x - 2y + z - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto improprio ortogonale al piano $\alpha : 3x - y + z - \sqrt{5} = 0$

Risposta $P_\infty = [(3, -1, 1, 0)]$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ k-1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq 0$; $k \neq -1, 0$, soluz. unica, $k = -1$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione della retta r rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano π rappresentato dalla terza equazione.

  Risposta $k \neq -1, 0$, r, π incidenti, $k = 0$, r, π paralleli e disgiunti, $k = -1$, $r \subseteq \pi$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 4$ si determini una matrice diagonale D simile ad A_4 e, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio

$$W = \{(a + b + 3c, b + 2c - 2d, a - b - c - 2d, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio W.

  Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, -2, -2, 0))$ ______ **(pt.2)**

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di W.

  Risposta 1 ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 3x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$ e se ne determinino il centro e il fascio dei diametri.

Risposta Ellisse, $C = (0, 2)$, $\lambda x + \mu(y - 2) = 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ______ **(pt.3)**

Si determinino le coordinate del polo della retta $r :\ x + y - 2 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

Risposta $P_\infty = [(1, 3, 0)]$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 - z^2 - 6z = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.2)**

Si riconosca la sezione della quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi :\ y - z = 0$, precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Ellisse ______ **(pt.2)**

Si determini un'equazione cartesiana del piano α passante per $P = (0, 0, 0)$ tale che la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia riducibile.

Risposta $z = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto improprio ortogonale al piano $\alpha : 2x - 7y + 17 = 0$

Risposta $P_\infty = [(2, -7, 0, 0)]$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq -1$; $k \neq -1, 2$, soluz. unica, $k = 2$, ∞^1 soluzioni ________ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione della retta r rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano π rappresentato dalla terza equazione.

  Risposta $k \neq -1, 2$, r, π incidenti, $k = -1$, r, π paralleli e disgiunti, $k = 2$, $r \subseteq \pi$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k-4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ ________ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 4$ ________ **(pt.2)**

- posto $k = 4$ si determini una matrice diagonale D simile ad A_4 e, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio

$$W = \{(2a + b + 3c + d, b - c - d, a + b + c, -b + c + d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio W.

  Risposta $\mathcal{B} = ((2, 0, 1, 0), (1, 1, 1, -1))$ ________ **(pt.2)**

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di W.

  Risposta 2 ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy + 2x + y - 1 = 0$ e se ne determinino il centro e il fascio dei diametri.

Risposta Iperbole, $C = (1/2, 5/2)$, $\lambda(3x - y + 1) + \mu(2x - 1) = 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ________ **(pt.3)**

Si determinino le coordinate del polo della retta $r : \ x - y + 2 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

Risposta $P_\infty = [(1, 2, 0)]$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2xy - z^2 + 4y + 1 = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico ________ **(pt.2)**

Si riconosca la sezione della quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi : \ x - y = 0$, precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Ellisse ________ **(pt.2)**

Si determini un'equazione cartesiana del piano α passante per $P = (0, 0, -1)$ tale che la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia riducibile.

Risposta $x + 2y + z + 1 = 0$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto improprio ortogonale al piano $\alpha : 4y - 6z + 13 = 0$

Risposta $P_\infty = [(0, 2, -3, 0)]$ ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k-2 \\ k-3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2k-4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq 2$; $k \neq 1, 2$, soluz. unica, $k = 1$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione della retta r rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano π rappresentato dalla terza equazione.

  Risposta $k \neq 1, 2$, r, π incidenti, $k = 2$, r, π paralleli e disgiunti, $k = 1$, $r \subseteq \pi$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ si determini una matrice diagonale D simile ad A_0 e, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio

$$W = \{(a + 2c + d, 2a + b + d, 3a + d, 4a + b + d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio W.

  Risposta $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ ______ **(pt.2)**

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di W.

  Risposta 0 ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + xy + 2y^2 + 1 = 0$ e se ne determinino il centro e il fascio dei diametri.

Risposta Ellisse, $C = (0, 0)$, $\lambda x + \mu y = 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ______ **(pt.3)**

Si determinino le coordinate del polo della retta $r: \ x + y = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

Risposta $P_\infty = [(3, 1, 0)]$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 - z^2 - 6z = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.2)**

Si riconosca la sezione della quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi: \ y - 2z = 0$, precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Ellisse ______ **(pt.2)**

Si determini un'equazione cartesiana del piano α passante per $P = (0, 0, -6)$ tale che la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia riducibile.

Risposta $z - 6 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto improprio ortogonale al piano $\alpha : 4x - 7z + 18 = 0$

Risposta $P_\infty = [(4, 0, -7, 0)]$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-2 \\ 0 & k-3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2k-6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq 1$; $k \neq 1, 4$, soluz. unica, $k = 4$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione della retta r rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano π rappresentato dalla terza equazione.

  Risposta $k \neq 1, 4$, r, π incidenti, $k = 1$, r, π paralleli e disgiunti, $k = 4$, $r \subseteq \pi$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 2 & 0 \\ 2 & k+3 & k \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 4$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ si determini una matrice diagonale D simile ad A_0 e, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio

$$W = \{(3a + b + 5c + 2d, 0, a + 2b + 5c + 4d, -a + b + c + 2d) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio W.

  Risposta $\mathcal{B} = ((3, 0, 1, -1), (1, 0, 2, 1))$ ______ **(pt.2)**

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di W.

  Risposta 2 ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 - 4xy + y^2 + 2y - 4 = 0$ e se ne determinino il centro e il fascio dei diametri.

Risposta Iperbole, $C = (2/3, 1/3)$, $\lambda(x - 2y) + \mu(2x - y - 1) = 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ______ **(pt.3)**

Si determinino le coordinate del polo della retta $r :\ 2x - y - 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

Risposta $P_\infty = [(0, 1, 0)]$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2xy - z^2 + 4y + 1 = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico ______ **(pt.2)**

Si riconosca la sezione della quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi :\ y + z = 0$, precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Iperbole ______ **(pt.2)**

Si determini un'equazione cartesiana del piano α passante per $P = (0, 0, 1)$ tale che la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia riducibile.

Risposta $x - 2y + z - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto improprio ortogonale al piano $\alpha : 3x - y + 2z - 9 = 0$

Risposta $P_\infty = [(3, -1, 2, 0)]$ ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 15/01/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2k+2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile;

  Risposta Compatibile per $k \neq -1$; $k \neq -2, -1$, soluz. unica, $k = -2$, ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione della retta r rappresentata dalle prime due equazioni del sistema e del piano π rappresentato dalla terza equazione.

  Risposta $k \neq -2, -1$, r, π incidenti, $k = -1$, r, π paralleli e disgiunti, $k = -2$, $r \subseteq \pi$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.3)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 9$ si determini una matrice diagonale D simile ad A_9 e, se possibile, una matrice diagonalizzante P ortogonale; nel caso non sia possibile si giustifichi la risposta.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio

$$W = \{(b + 3c + 4d, a + 4b + c + 6d, 2a + 3b + 2c + 7d, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

- Si determini una base del sottospazio W.

  Risposta $\mathcal{B} = ((0, 1, 2, 0), (1, 4, 3, 0), (3, 1, 2, 0))$ ______ **(pt.2)**

- Si determini la dimensione di un complemento diretto di W.

  Risposta 1 ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ e se ne determinino il centro e il fascio dei diametri.

Risposta Ellisse, $C = (-1, 2)$, $\lambda(x + 1) + \mu(y - 2) = 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ______ **(pt.3)**

Si determinino le coordinate del polo della retta $r : \ x + y - 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}$.

Risposta $P_\infty = [(1, 4, 0)]$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 4y^2 - z^2 - 6z = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.2)**

Si riconosca la sezione della quadrica $\mathcal{Q}$ con il piano $\pi : \ x + y = 0$, precisando nel caso in cui la sezione sia riducibile una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono.

Risposta Iperbole ______ **(pt.2)**

Si determini un'equazione cartesiana del piano α passante per $P = (0, 0, 0)$ tale che la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia riducibile.

Risposta $z = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto improprio ortogonale al piano $\alpha : x - 2y + 4z - \sqrt{7} = 0$

Risposta $P_\infty = [(1, -2, 4, 0)]$ ______ **(pt.2)**