UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 14/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k-1 \\ 1 & k+1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni k. $k = 0, \infty^3$ soluzioni, $k \neq 0, \infty^2$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini:

- l'insieme S_0 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_0 = \{(a, b, c, a + b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- una base B di S_0 e la si ortonormalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((0, 0, 1, 0),(1, 0, 0, 1),(0, 1, 0, 1))$, $B' = ((0, 0, 1, 0),(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0, 1/\sqrt{6}))$ **(pt.3)**
- un complemento diretto di S_0.

  Risposta $W = \{(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = k + 1$ ______ **(pt.1)**
- i valori di k per i quali gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 0, -1$ ______ **(pt.1)**
- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$, una matrice D diagonale simile ad A_1 e una corrispondente matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$.

Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 6x - 6y - 2z + 5 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si riconosca Σ e se ne determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Σ è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (1, 1, -1)$, che è il suo unico punto doppio ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy + 2y + 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta parabola, $C_\infty = [(1, 1, 0)]$, asse: $2x - 2y - 1 = 0$, $V = (-9/8, -13/8)$, non ha asintoti ______ **(pt.3)**

Si determinino, nella polarità indotta da $\mathcal{C}$, il polo R della retta $r : x = 2$ e il coniugato P di R appartenente alla retta $s : x - y + 3 = 0$.

Risposta $R = (-4, -5)$, $P = (2, 5)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2y^2 - 2yz + 2y + z + 1 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.2)**

Si determini, se esiste, un punto reale P_∞ appartenente alla conica impropria di $\mathcal{Q}$.

Risposta $P_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$ ______ **(pt.1)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : z = 0$.

Risposta Iperbole ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 14/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & k-3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni k. $k = 2, \infty^3$ soluzioni, $k \neq 2, \infty^2$ soluzioni ________ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determini:

- l'insieme S_2 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_2 = \{(a, 2b + c, b, c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

- una base B di S_2 e la si ortonormalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1,0,0,0),(0,2,1,0),(0,1,0,1))$, $B' = ((1,0,0,0),(0,2/\sqrt{5},1/\sqrt{5},0),(0,1/\sqrt{30},-2/\sqrt{30},5/\sqrt{30}))$ ________ **(pt.3)**

- un complemento diretto di S_2.

  Risposta $W = \{(0,0,0,a) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-1 & k-1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = k - 1$ ________ **(pt.1)**

- i valori di k per i quali gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 1, 3$ ________ **(pt.1)**

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 3$ ________ **(pt.2)**

- posto $k = 0$, una matrice D diagonale simile ad A_0 e una corrispondente matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$.

Risposta $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4z - 4 = 0$ ________ **(pt.3)**

Si riconosca Σ e se ne determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Σ è un cilindro dotato di falda reale con vertice $V_\infty = [(1,1,0,0)]$, che è il suo unico punto doppio ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 5 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta parabola, $C_\infty = [(2,1,0)]$, asse: $5x - 10y + 1 = 0$, $V = (-63/25, -29/25)$, non ha asintoti ________ **(pt.3)**

Si determinino, nella polarità indotta da $\mathcal{C}$, il polo R della retta $r : y = -1$ e il coniugato P di R appartenente alla retta $s : x - y + 4 = 0$.

Risposta $R = (-3, -1)$, $P = (-5, -1)$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 3y^2 + 3yz + 3y + 2z + 1 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico ________ **(pt.2)**

Si determini, se esiste, un punto reale P_∞ appartenente alla conica impropria di $\mathcal{Q}$.

Risposta $P_\infty = [(0,0,1,0)]$ ________ **(pt.1)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : y = 0$.

Risposta Parabola ________ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 14/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 1 & k-1 \\ -1 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni k. $k = 1, \infty^3$ soluzioni, $k \neq 1, \infty^2$ soluzioni **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determini:

- l'insieme S_1 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_1 = \{(a+b, a, b, c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- una base B di S_1 e la si ortonormalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((0,0,0,1),(1,1,0,0),(1,0,1,0))$, $B' = ((0,0,0,1),(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0),(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0))$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di S_1.

  Risposta $W = \{(0, a, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+3 & k+3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = k+3$ **(pt.1)**

- i valori di k per i quali gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq -3, -2$ **(pt.1)**

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2$ **(pt.2)**

- posto $k = 1$, una matrice D diagonale simile ad A_1 e una corrispondente matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$.

Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 2z - 1 = 0$ **(pt.3)**

Si riconosca Σ e se ne determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Σ è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 0, -1)$, che è il suo unico punto doppio **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta parabola, $C_\infty = [(1, -1, 0)]$, asse: $2x + 2y - 1 = 0$, $V = (13/8, -9/8)$, non ha asintoti **(pt.3)**

Si determinino, nella polarità indotta da $\mathcal{C}$, il polo R della retta $r : y = 2$ e il coniugato P di R appartenente alla retta $s : x + y + 3 = 0$.

Risposta $R = (5, -4)$, $P = (-5, 2)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 3y^2 - 3yz - 3y - 2z - 1 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico **(pt.2)**

Si determini, se esiste, un punto reale P_∞ appartenente alla conica impropria di $\mathcal{Q}$.

Risposta $P_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$ **(pt.1)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : x - z = 0$.

Risposta Ellisse **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1° appello - 14/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & k+1 & 2 \\ k+3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni k. $k = -2, \infty^3$ soluzioni, $k \neq -2, \infty^2$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = -2$ si determini:

- l'insieme S_{-2} delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_{-2} = \{(a, b, a + 2c, c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- una base B di S_{-2} e la si ortonormalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((0, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (1, 0, 1, 0))$, $B' = ((0, 1, 0, 0), (0, 0, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (5/\sqrt{30}, 0, 1/\sqrt{30}, -2/\sqrt{30}))$ ______ **(pt.3)**
- un complemento diretto di S_{-2}.

  Risposta $W = \{(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ 2 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = k$ ______ **(pt.1)**
- i valori di k per i quali gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 0, 2$ ______ **(pt.1)**
- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 2$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$, una matrice D diagonale simile ad A_1 e una corrispondente matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : \begin{cases} y - z = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} y - z = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.

Risposta $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4x - 4 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si riconosca Σ e se ne determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Σ è un cilindro dotato di falda reale con vertice $V_\infty = [(0, 1, 1, 0)]$, che è il suo unico punto doppio ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 4x^2 + y^2 + 4xy + 2y + 5 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta parabola, $C_\infty = [(1, -2, 0)]$, asse: $10x + 5y + 1 = 0$, $V = (29/25, -63/25)$, non ha asintoti ______ **(pt.3)**

Si determinino, nella polarità indotta da $\mathcal{C}$, il polo R della retta $r : x = 1$ e il coniugato P di R appartenente alla retta $s : x + y + 4 = 0$.

Risposta $R = (1, -3)$, $P = (1, -5)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2y^2 + 2yz + 2y + z + 1 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico ______ **(pt.2)**

Si determini, se esiste, un punto reale P_∞ appartenente alla conica impropria di $\mathcal{Q}$.

Risposta $P_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$ ______ **(pt.1)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : z = 1$.

Risposta Iperbole ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 14/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni k. $k = -1, \infty^3$ soluzioni, $k \neq -1, \infty^2$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determini:

- l'insieme S_{-1} delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_{-1} = \{(a, b, b+c, c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base B di S_{-1} e la si ortonormalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1))$, $B' = ((1,0,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}))$ **(pt.3)**

- un complemento diretto di S_{-1}.

  Risposta $W = \{(0, a, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = k$ ______ **(pt.1)**

- i valori di k per i quali gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 0, 1$ ______ **(pt.1)**

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = -1$, una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e una corrispondente matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$.

Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 4xy - 2x - 4y - 4z - 3 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si riconosca Σ e se ne determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Σ è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (1, 0, -2)$, che è il suo unico punto doppio ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta parabola, $C_\infty = [(1, 1, 0)]$, asse: $2x - 2y + 1 = 0$, $V = (9/8, 13/8)$, non ha asintoti ______ **(pt.3)**

Si determinino, nella polarità indotta da $\mathcal{C}$, il polo R della retta $r : x = -2$ e il coniugato P di R appartenente alla retta $s : x - y - 3 = 0$.

Risposta $R = (4, 5)$, $P = (-2, -5)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : 2x^2 + y^2 - 2yz + 2y + z - 1 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico ______ **(pt.2)**

Si determini, se esiste, un punto reale P_∞ appartenente alla conica impropria di $\mathcal{Q}$.

Risposta $P_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$ ______ **(pt.1)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : y = 1$.

Risposta Parabola ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 1^o appello - 14/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-3 & 1 & k-4 \\ 2 & 0 & k-2 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_kX = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per ogni k. $k = 3, \infty^3$ soluzioni, $k \neq 3, \infty^2$ soluzioni ______ **(pt.2)**

Posto $k = 3$ si determini:

- l'insieme S_3 delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S_3 = \{(a, b, c, 2a + c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- una base B di S_3 e la si ortonormalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 1))$, $B' = ((0, 1, 0, 0), (1/\sqrt{5}, 0, 0, 2/\sqrt{5}), (-2/\sqrt{30}, 0, 5/\sqrt{30}, 1/\sqrt{30}))$ ______ **(pt.3)**

- un complemento diretto di S_3.

  Risposta $W = \{(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k-2 & k-2 & 0 \\ 2 & k-1 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = k - 2$ ______ **(pt.1)**

- i valori di k per i quali gli autovalori di A_k sono tutti distinti;

  Risposta $k \neq 2, 4$ ______ **(pt.1)**

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 4$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 5$, una matrice D diagonale simile ad A_5 e una corrispondente matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : \begin{cases} x - z = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

Risposta $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 4y - 4 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si riconosca Σ e se ne determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Σ è un cilindro dotato di falda reale con vertice $V_\infty = [(1, 0, 1, 0)]$, che è il suo unico punto doppio ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 - 4xy - 2x + 5 = 0$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta parabola, $C_\infty = [(2, 1, 0)]$, asse: $5x - 10y - 1 = 0$, $V = (63/25, 29/25)$, non ha asintoti ______ **(pt.3)**

Si determinino, nella polarità indotta da $\mathcal{C}$, il polo R della retta $r : y = 1$ e il coniugato P di R appartenente alla retta $s : x - y - 4 = 0$.

Risposta $R = (3, 1)$, $P = (5, 1)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} : 2x^2 + y^2 + 2yz + 2y + z - 1 = 0$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico ______ **(pt.2)**

Si determini, se esiste, un punto reale P_∞ appartenente alla conica impropria di $\mathcal{Q}$.

Risposta $P_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$ ______ **(pt.1)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : x - z = 0$.

Risposta Ellisse ______ **(pt.1)**