A

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 3/11/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+5 & -2 & 0 & k+4 \\ -6 & k+6 & k+2 & -4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq -2$ ∞^2 soluz., $k = -2$ ∞^3 soluz. **(pt.3)**

Posto $k = -4$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(2\alpha, \alpha, -5\alpha - 2\beta + 1, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché il sistema non è omogeneo **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$.
  Risposta $((2,1,-5,0),(0,0,-2,1),(0,0,1,0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -3 & k & -2-k \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & k-2 & k-1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-3, -2, k-1$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq -2, -1$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq -1$ **(pt.2)**

Posto $k = -2$, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_{-2} e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & h & -\frac{h}{2} \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$. Si dica, motivando la risposta, se A è invertibile. In tal caso si determinino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perché ha determinante non nullo; $h = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,5,-7,10)$, $v_3 = (0,2,0,-1)$, $v_4 = (1,2,1,-1)$ a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore nullo.

Risposta $v_1 + 0v_2 + v_3 - v_4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali del parametro k il vettore $v = (0,k,-8)$ appartiene alla chiusura lineare di $S = \{(1,2,4),(0,-1,2)\}$.

Risposta $k = 4$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (0,6,-4,5)$ ha componenti $(0,0,0,2)$.

Risposta $\mathcal{B} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,3,-2,\frac{5}{2}))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un sistema di generatori di $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y - t = 9\}$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste, perché U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ **(pt.2)**

Si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $\{\underline{0}\}$ **(pt.3)**

B

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 3/11/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-3 & -2 & k-2 \\ k-5 & -4 & k-1 & -6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq 5$ ∞^2 soluz., $k = 5$ ∞^3 soluz. **(pt.3)**

Posto $k = 3$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(-5\alpha - 2\beta + 6, \beta, \alpha, 2\alpha - 2) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché il sistema non è omogeneo **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$.
  Risposta $((-5, 0, 1, 2), (-2, 1, 0, 0), (3, 0, 0, -1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 4 & 6-k & k-1 \\ 0 & k-2 & k-3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-1, 4, k-2$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq 1, 6$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 6$, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_6 e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 8h & 0 & 4h \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 16h & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$. Si dica, motivando la risposta, se A è invertibile. In tal caso si determinino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perché ha determinante non nullo; $h = \frac{1}{16}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 0, 4)$, $v_3 = (1, 1, 0, 2)$, $v_4 = (0, -3, 4, 0)$ a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore nullo.

Risposta $v_1 + v_2 - 2v_3 + 0v_4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali del parametro k il vettore $v = (0, 3k, -9)$ appartiene alla chiusura lineare di $S = \{(1, 2, 4), (0, -1, 3)\}$.

Risposta $k = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (1, -2, 0, 6)$ ha componenti $(0, 0, 0, 2)$.

Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, -1, 0, 3))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un sistema di generatori di $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y + t = 2\}$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste, perché U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ **(pt.2)**

Si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $\{\underline{0}\}$ **(pt.3)**

C

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 3/11/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-3 & -2 & k-4 \\ k-6 & -6 & k-2 & -4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq 6$ ∞^2 soluz., $k = 6$ ∞^3 soluz. __________ **(pt.3)**

Posto $k = 4$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(-5\alpha - 2\beta + 1, 2\alpha, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché il sistema non è omogeneo __________ **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$.
  Risposta $((-5, 2, 1, 0), (-2, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0))$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -3 & -3-k & k+1 \\ 0 & k & k-1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-3, -2, k$ __________ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq -3, -2$ __________ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq -2$ __________ **(pt.2)**

Posto $k = -3$, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_{-3} e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} -h & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2h & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$. Si dica, motivando la risposta, se A è invertibile. In tal caso si determinino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perché ha determinante non nullo; $h = -\frac{1}{2}$ __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una combinazione lineare dei vettori $v_1 = (-1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (3, 0, 1, 0)$, $v_3 = (3, 6, 1, 6)$, $v_4 = (0, 2, 0, 2)$ a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore nullo.

Risposta $0v_1 + v_2 - v_3 + 3v_4$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali del parametro k il vettore $v = (0, k, 8)$ appartiene alla chiusura lineare di $S = \{(1, 2, 4), (0, -1, 4)\}$.

Risposta $k = -2$ __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (2, -4, 0, 3)$ ha componenti $(0, 0, 0, 2)$.

Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, -2, 0, \frac{3}{2}))$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un sistema di generatori di $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + y - 5t = 1\}$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste, perché U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ __________ **(pt.2)**

Si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $\{\underline{0}\}$ __________ **(pt.3)**

D

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 3/11/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & k+1 & 0 & -2 \\ -6 & -4 & k-1 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$ ∞^2 soluz., $k = 1$ ∞^3 soluz. **(pt.3)**

Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(2\alpha - 2, \beta, -5\alpha - 2\beta + 6, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché il sistema non è omogeneo **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$.
  Risposta $((2, 0, -5, 1), (0, 1, -2, 0), (-1, 0, 3, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 4 & k & 5-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & k-1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-1, 4, k-1$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq 0, 5$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**

Posto $k = 5$, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_5 e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -h & \frac{h}{2} \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$. Si dica, motivando la risposta, se A è invertibile. In tal caso si determinino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perché ha determinante non nullo; $h = -1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1, 2, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 5, -7, 10)$, $v_4 = (0, 2, 0, -1)$ a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore nullo.

Risposta $v_1 - v_2 + 0v_3 - v_4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali del parametro k il vettore $v = (0, k, 8)$ appartiene alla chiusura lineare di $S = \{(1, 2, 4), (0, -1, 2)\}$.

Risposta $k = -4$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (6, 0, -4, 5)$ ha componenti $(0, 0, 0, 2)$.

Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 0, -2, \frac{5}{2}))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un sistema di generatori di $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - 3t = 7\}$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste, perché U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ **(pt.2)**

Si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $\{\underline{0}\}$ **(pt.3)**

E

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 3/11/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k-5 & k-6 & 0 \\ k-4 & -6 & -4 & k-8 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq 8$ ∞^2 soluz., $k = 8$ ∞^3 soluz. **(pt.3)**

Posto $k = 6$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(\alpha, 2\alpha, \beta, -5\alpha - 2\beta + 1) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché il sistema non è omogeneo **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$.
  Risposta $((1, 2, 0, -5), (0, 0, 1, -2), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k-3 & 2 & 6-k \\ k-5 & 0 & k-4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-1, 2, k-4$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq 3, 6$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.2)**

Posto $k = 6$, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_6 e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} -8h & 0 & -4h \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -16h & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$. Si dica, motivando la risposta, se A è invertibile. In tal caso si determinino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perché ha determinante non nullo; $h = -\frac{1}{16}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1, 2, 0, 4)$, $v_2 = (0, -3, 4, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 0)$, $v_4 = (1, 1, 0, 2)$ a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore nullo.

Risposta $v_1 + 0v_2 + v_3 - 2v_4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali del parametro k il vettore $v = (0, -k, -9)$ appartiene alla chiusura lineare di $S = \{(1, 2, 4), (0, -1, 3)\}$.

Risposta $k = -3$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (0, 3, 2, -4)$ ha componenti $(0, 0, 0, 2)$.

Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, \frac{3}{2}, 1, -2))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un sistema di generatori di $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - t = -4\}$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste, perché U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ **(pt.2)**

Si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $\{\underline{0}\}$ **(pt.3)**

F

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 3/11/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & k+3 & k+4 \\ k+5 & k+1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$. Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta Compatibile $\forall\, k \in \mathbb{R}$; $k \neq -1$ ∞^2 soluz., $k = -1$ ∞^3 soluz. **(pt.3)**

Posto $k = -3$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema e si dica, motivando la risposta, se tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(\alpha, -5\alpha - 2\beta + 6, \beta, 2\alpha - 2) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ perché il sistema non è omogeneo **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$.
  Risposta $((1, -5, 0, 2), (0, -2, 1, 0), (0, 3, 0, -1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ k-2 & -3 & -k \\ k-4 & 0 & k-3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-3, -2, k-3$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq 0, 1$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 2h & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4h & -2h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$. Si dica, motivando la risposta, se A è invertibile. In tal caso si determinino, se esistono, i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perché ha determinante non nullo; $h = \frac{1}{4}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una combinazione lineare dei vettori $v_1 = (3, 0, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $v_3 = (0, 2, 0, 2)$, $v_4 = (3, 6, 1, 6)$ a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore nullo.

Risposta $v_1 + 0v_2 + 3v_3 - v_4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali del parametro k il vettore $v = (0, -3k, -9)$ appartiene alla chiusura lineare di $S = \{(1, 2, 4), (0, -1, 3)\}$.

Risposta $k = -1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini, se esiste, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ rispetto alla quale il vettore $v = (0, 3, 2, -4)$ ha componenti $(0, 0, 0, 2)$.

Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, \frac{3}{2}, 1, -2))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un sistema di generatori di $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 6x + y + t = -1\}$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste, perché U non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ **(pt.2)**

Si determini il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(U)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

Risposta $\{\underline{0}\}$ **(pt.3)**