UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-ky+(k+1)z=0 \end{cases}$ e $\alpha_k : kx+3y+(k-2)z=0$

Risposta se $k \neq \frac{1}{2}$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k=\frac{1}{2}$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k=0$ si determini:

- il piano per r_0 ortogonale al piano α_0;

  Risposta $8x+2y+3z-2=0$ **(pt.2)**
- la proiezione di r_0 su α_0;

  Risposta $\begin{cases} 3y-2z=0 \\ 8x+2y+3z-2=0 \end{cases}$ **(pt.1)**
- la retta incidente r_0 ed $s : \begin{cases} 3x+y+z+4=0 \\ -2z=5 \end{cases}$ e passante per $P=(1,0,0)$.

  Risposta $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 15x+5y-9z-15=0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (1+k)x^2+2xy+(1+2k)y^2+4x-4y=0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=-\frac{4}{3}$, $r_1 : x-y=0$, $r_2 : x-5y-12=0$ **(pt.2)**
- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta Per $k<-\frac{3}{2} \cup k>0$ ellisse; per $-\frac{3}{2}<k<0$ e $k \neq -\frac{4}{3}$ iperbole; per $k=0,-\frac{3}{2}$ parabola **(pt.3)**

Posto $k=-1$:

- si studi la conica C_{-1} determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), assi e asintoti;

  Risposta è un'iperbole, $C=(0,-2)$, assi: $2x-(1\pm\sqrt{5})y-2(1\pm\sqrt{5})=0$, asintoti: $y+2=0$, $2x-y-2=0$ **(pt.5)**
- si determini il polo della retta $r : y=1$ nella polarità indotta da C_{-1}.

  Risposta $P=(-\frac{4}{3},-2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono quadrico di vertice $V=(1,0,1)$ e curva direttrice $\mathcal{C} :\ x^2+y^2-2x+2y-2=0=z$.

Risposta $x^2+y^2-3z^2-2yz-2x+2y+6z-2=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+2xy-2yz-z^2-4z-1=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.3)**
- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha :\ x=0$ e $\beta :\ x-z-2=0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ iperbole, $\mathcal{C}_\beta$ riducibile di componenti $x_1-x_3=0=x_4$ e $4y+3=0=x-z-2$ **(pt.4)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-(k+1)y+(k+2)z-k-1=0 \end{cases}$ e $\alpha_k : (k+1)x+3y+(k-1)z+3=0$

Risposta se $k \neq -\frac{1}{2}$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k=-\frac{1}{2}$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k=-1$ si determini:

- il piano per r_{-1} ortogonale al piano α_{-1};

  Risposta $8x+2y+3z=0$ **(pt.2)**

- la proiezione di r_{-1} su α_{-1};

  Risposta $\begin{cases} 3y-2z+3=0 \\ 8x+2y+3z=0 \end{cases}$ **(pt.1)**

- la retta incidente r_{-1} ed $s : \begin{cases} x-z-1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ e passante per $P=(1,0,0)$.

  Risposta $\begin{cases} 2y-z=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (1+k)x^2+2xy+(1+3k)y^2+4x-4y=0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=-1$, $r_1 : x-y=0$, $r_2 : y+2=0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta Per $k<-\frac{4}{3} \cup k>0$ ellisse; per $-\frac{4}{3}<k<0$ e $k\neq -1$ iperbole; per $k=0,-\frac{4}{3}$ parabola **(pt.3)**

Posto $k=-\frac{1}{3}$:

- si studi la conica $C_{-\frac{1}{3}}$ determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), assi e asintoti;

  Risposta è un'iperbole, $C=(2,-\frac{10}{3})$, assi: $9x-3(1\pm\sqrt{10})y-28\mp 10\sqrt{10}=0$, asintoti: $x=2$, $x+3y+8=0$ **(pt.5)**

- si determini il polo della retta $r : x-2y+2=0$ nella polarità indotta da $C_{-\frac{1}{3}}$.

  Risposta $P=(0,-1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono quadrico di vertice $V=(1,1,0)$ e curva direttrice $\mathcal{C} :\ y^2+z^2-2y+2z-2=0=x$.

Risposta $3x^2-y^2-z^2+2xz-6x+2y-2z+2=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+2xy-2yz-z^2-2x-2y-4z=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha :\ x-z-3=0$ e $\beta :\ x+y-1=0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\beta$ parabola, $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile di componenti $x_1-x_3=0=x_4$ e $4y+3=0=x-z-3$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+(1-k)y+kz+2=0 \end{cases}$ e $\alpha_k : (k-1)x+3y+(k-3)z+k-1=0$

Risposta se $k \neq \frac{3}{2}$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k=\frac{3}{2}$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k=1$ si determini:

- il piano per r_1 ortogonale al piano α_1;

  Risposta $8x+2y+3z+6=0$ **(pt.2)**
- la proiezione di r_1 su α_1;

  Risposta $\begin{cases} 3y-2z=0 \\ 8x+2y+3z+6=0 \end{cases}$ **(pt.1)**
- la retta incidente r_1 ed $s : \begin{cases} 3x+y+2z=0 \\ 2z-y=1 \end{cases}$ e passante per $P=(1,0,0)$.

  Risposta $\begin{cases} 2x+4y-z-2=0 \\ 3x-2y+8z-3=0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (1+k)x^2+2xy+(1+4k)y^2+4x-4y=0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=-\frac{4}{5}$, $r_1 : x-y=0$, $r_2 : x+11y+20=0$ **(pt.2)**
- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta Per $k<-\frac{5}{4} \cup k>0$ ellisse; per $-\frac{5}{4}<k<0$ e $k \neq -\frac{4}{5}$ iperbole; per $k=0,-\frac{5}{4}$ parabola **(pt.3)**

Posto $k=-1$:

- si studi la conica C_{-1} determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), assi e asintoti;

  Risposta è un'iperbole, $C=(-4,-2)$, assi: $2x+(-3\pm\sqrt{13})y+2(1\pm\sqrt{13})=0$, asintoti: $y+2=0$, $2x-3y+2=0$ **(pt.5)**
- si determini il polo della retta $r : y=1$ nella polarità indotta da C_{-1}.

  Risposta $P=(-\frac{8}{3},-2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono quadrico di vertice $V=(-1,0,-1)$ e curva direttrice $\mathcal{C} : x^2+y^2-2x+2y-2=0=z$.

Risposta $x^2+y^2+z^2-4xz+2yz-2x+2y-2z-2=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+2xy-2yz-z^2+2x+2y-4z=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.3)**
- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha : x+1=0$ e $\beta : x-z-1=0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ iperbole, $\mathcal{C}_\beta$ riducibile di componenti $x_1-x_3=0=x_4$ e $4y+3=0=x-z-1$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° test - 21/12/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-(k+2)y+(k+3)z+k+3=0 \end{cases}$ e $\alpha_k : (k+2)x+3y+kz+k=0$

Risposta se $k \neq -\frac{3}{2}$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k=-\frac{3}{2}$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k=-2$ si determini:

- il piano per r_{-2} ortogonale al piano α_{-2};

  Risposta $8x+2y+3z+1=0$ **(pt.2)**

- la proiezione di r_{-2} su α_{-2};

  Risposta $\begin{cases} 3y-2z-2=0 \\ 8x+2y+3z+1=0 \end{cases}$ **(pt.1)**

- la retta incidente r_{-2} ed $s : \begin{cases} 3x+y+z+4=0 \\ -2z=5 \end{cases}$ e passante per $P=(1,0,0)$.

  Risposta $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 15x+5y-9z-15=0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (1+2k)x^2+2xy+(1+k)y^2-4x+4y=0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=-\frac{4}{3}$, $r_1 : x-y=0$, $r_2 : 5x-y+12=0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta Per $k<-\frac{3}{2} \cup k>0$ ellisse; per $-\frac{3}{2}<k<0$ e $k \neq -\frac{4}{3}$ iperbole; per $k=0,-\frac{3}{2}$ parabola **(pt.3)**

Posto $k=-1$:

- si studi la conica C_{-1} determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), assi e asintoti;

  Risposta è un'iperbole, $C=(-2,0)$, assi: $2x+(1\pm\sqrt{5})y+4=0$, asintoti: $x+2=0$, $x-2y+2=0$ **(pt.5)**

- si determini il polo della retta $r : x=1$ nella polarità indotta da C_{-1}.

  Risposta $P=(-2,-\frac{4}{3})$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono quadrico di vertice $V=(-1,-1,0)$ e curva direttrice $\mathcal{C} :\ y^2+z^2-2y+2z-2=0=x$.

Risposta $x^2+y^2+z^2-4xy+2xz-2x-2y+2z-2=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+2xy-2yz-z^2+2y-2z+2=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha :\ x-z-1=0$ e $\beta :\ x+y=0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\beta$ parabola, $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile di componenti $x_1-x_3=0=x_4$ e $4y+3=0=x-z-1$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-(k+3)y+(k+4)z-k-4=0 \end{cases}$ e $\alpha_k : (k+3)x+3y+(k+1)z-k-1=0$

Risposta se $k \neq -\frac{5}{2}$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k=-\frac{5}{2}$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k=-3$ si determini:

- il piano per r_{-3} ortogonale al piano α_{-3};

  Risposta $8x+2y+3z-5=0$ **(pt.2)**

- la proiezione di r_{-3} su α_{-3};

  Risposta $\begin{cases} 3y-2z+2=0 \\ 8x+2y+3z-5=0 \end{cases}$ **(pt.1)**

- la retta incidente r_{-3} ed $s : \begin{cases} x-z-1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ e passante per $P=(1,0,0)$.

  Risposta $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (1+3k)x^2+2xy+(1+k)y^2-4x+4y=0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=-1$, $r_1 : x-y=0$, $r_2 : x+2=0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta Per $k<-\frac{4}{3} \cup k>0$ ellisse; per $-\frac{4}{3}<k<0$ e $k \neq -1$ iperbole; per $k=0,-\frac{4}{3}$ parabola **(pt.3)**

Posto $k=-\frac{1}{3}$:

- si studi la conica $C_{-\frac{1}{3}}$ determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), assi e asintoti;

  Risposta è un'iperbole, $C=(-\frac{10}{3},2)$, assi: $3x+(1\pm\sqrt{10})y+8\mp2\sqrt{10}=0$, asintoti: $y-2=0$, $3x+y+8=0$ **(pt.5)**

- si determini il polo della retta $r : 2x-y-2=0$ nella polarità indotta da $C_{-\frac{1}{3}}$.

  Risposta $P=(-1,0)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono quadrico di vertice $V=(1,0,1)$ e curva direttrice $\mathcal{C} :\ x^2+y^2-2x+2y+1=0=z$.

Risposta $x^2+y^2-2yz-2x+2y+1=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+2xy-2yz-z^2-2y-6z-6=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha :\ x=0$ e $\beta :\ x-z-3=0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha$ iperbole, $\mathcal{C}_\beta$ riducibile di componenti $x_1-x_3=0=x_4$ e $4y+3=0=x-z-3$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-(k-2)y+(k-1)z-2=0 \end{cases}$ e $\alpha_k : (k-2)x+3y+(k-4)z+k-2=0$

Risposta se $k \neq \frac{5}{2}$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k=\frac{5}{2}$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k=2$ si determini:

- il piano per r_2 ortogonale al piano α_2;

  Risposta $8x+2y+3z-10=0$ **(pt.2)**

- la proiezione di r_2 su α_2;

  Risposta $\begin{cases} 3y-2z=0 \\ 8x+2y+3z-10=0 \end{cases}$ **(pt.1)**

- la retta incidente r_2 ed $s : \begin{cases} 3x+y+2z=0 \\ 2z-y=1 \end{cases}$ e passante per $P=(1,0,0)$.

  Risposta $\begin{cases} 2x+z-2=0 \\ 3x-2y+8z-3=0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (1+4k)x^2+2xy+(1+k)y^2-4x+4y=0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=-\frac{4}{5}$, $r_1 : x-y=0$, $r_2 : 11x+y+20=0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta Per $k<-\frac{5}{4} \cup k>0$ ellisse; per $-\frac{5}{4}<k<0$ e $k \neq -\frac{4}{5}$ iperbole; per $k=0,-\frac{5}{4}$ parabola **(pt.3)**

Posto $k=-1$:

- si studi la conica C_{-1} determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), assi e asintoti;

  Risposta è un'iperbole, $C=(-2,-4)$, assi: $2x+(3\pm\sqrt{13})y+4(4\pm\sqrt{13})=0$, asintoti: $x+2=0$, $3x-2y-2=0$ **(pt.5)**

- si determini il polo della retta $r : x=1$ nella polarità indotta da C_{-1}.

  Risposta $P=(-2,-\frac{8}{3})$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del cono quadrico di vertice $V=(1,1,0)$ e curva direttrice $\mathcal{C} : y^2+z^2-2y+2z+1=0=x$.

Risposta $y^2+z^2-2xz-2y+2z+1=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione $x^2+2xy-2yz-z^2+2x+4y-2z+3=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Paraboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha : x-z=0$ e $\beta : x+y+1=0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\beta$ parabola, $\mathcal{C}_\alpha$ riducibile di componenti $x_1-x_3=0=x_4$ e $4y+3=0=x-z$ **(pt.4)**