UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k & 1 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = -3, k = 1, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_1 = \{(\alpha, 2\alpha - 2, 1 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_{-3} = \{(\alpha, 2\alpha - 2, -3 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = 1$, si indichi una base B della copertura lineare di S_1 e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((0, -2, 1), (1, 2, -1))$, $B' = (0, -2, 1), (1, 0, 0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-3 & 1 \\ k-1 & 0 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid b = 2a, c = 4a, d = a - 2, a \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 3$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = 4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x - y = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (7, 7, -3, 3)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^t X_u = (7, -3)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 0))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (1, 2, 0, -1)$ e la proiezione del vettore $v = (0, 3, 6, 4)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = \sqrt{6}$, $v_w = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -3 & 12+k & 4-k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1+2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2$ **(pt.5)**

- posto $k = 0$, una matrice D diagonale simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_0. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((1, 0, 1), (0, 1, -3), (1, 0, 0))$ B' non è di autovettori perchè A_0 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k & 1 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = -4, k = 2, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_2 = \{(\alpha, 2\alpha - 2, 2 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_{-4} = \{(\alpha, 2\alpha - 2, -4 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = -4$, si indichi una base B della copertura lineare di S_{-4} e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((0, -2, -4), (1, 2, -1))$, B è già una base ortogonale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2k+4 & 4 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2b, c = b, d = 4b - 1, b \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 4$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x + 2y = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (4, -2, 3, -3)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^tX_u = (-2, 3)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (1, 2, 0, -1)$ e la proiezione del vettore $v = (3, 0, 6, 4)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = \sqrt{6}$, $v_w = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -9+k & 6-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & -1+2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq \frac{3}{2}$ **(pt.5)**

- posto $k = 0$, una matrice D diagonale simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_0. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((3, 1, 0), (-2, 0, 1), (1, 0, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_0 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k & 1 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = -5, k = 3, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_{-5} = \{(\alpha, 2\alpha - 14, -5 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_3 = \{(\alpha, 2\alpha - 14, 3 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = 3$, si indichi una base B della copertura lineare di S_3 e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1, 2, -1), (0, -14, 3))$, $B' = ((1, 2, -1), (\frac{31}{6}, \frac{-22}{6}, -\frac{13}{6}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2k & 0 \\ 3-k & 5 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a = -2b, c = -3b, d = -b - 3, b \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 3$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid 4x + y = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (2, -8, -2, 2)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, -4, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^tX_u = (2, -2)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((4, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (1, 2, 0, -1)$ e la proiezione del vettore $v = (3, 4, 6, 0)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = \sqrt{6}$, $v_w = \left(\frac{11}{6}, \frac{11}{3}, 0, -\frac{11}{6}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & k-4 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 3+2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -1$ **(pt.5)**

- posto $k = 0$, una matrice D diagonale simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_0. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_0 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k-1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = \pm 2, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_2 = \{(\alpha, 2\alpha - 2, 1 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_{-2} = \{(\alpha, 2\alpha - 2, -3 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = -2$, si indichi una base B della copertura lineare di S_{-2} e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1, 2, -1), (0, -2, -3))$, $B' = ((1, 2, -1), (\frac{1}{6}, \frac{-5}{3}, \frac{-19}{6}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-4 & 1 \\ k-2 & 0 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid b = 2a, c = 4a, d = a - 2, a \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 4$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = 5$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid y - 2x = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (1, 2, -2, 2)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^t X_u = (1, -2)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (-3, 1, 0, -1)$ e la proiezione del vettore $v = (0, 3, 6, 4)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = \sqrt{11}$, $v_w = \left(\frac{3}{11}, -\frac{1}{11}, 0, \frac{1}{11}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -3 & k+11 & 5-k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 2k-1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -1$ **(pt.5)**

- posto $k = 1$, una matrice D diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_1. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((1, 0, 1), (0, 1, -3), (1, 0, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_1 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k-1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = \pm 3, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_3 = \{(\alpha, 2\alpha - 2, 2 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_{-3} = \{(\alpha, 2\alpha - 2, -4 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = 3$, si indichi una base B della copertura lineare di S_3 e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1, 2, -1), (0, -2, 2))$, $B' = ((1, 2, -1), (1, 0, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 2k+2 & 4 \end{pmatrix} \right], \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2b, c = b, d = 4b - 1, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 5$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid 2x + y = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (-2, 4, -1, 1)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^tX_u = (-2, -1)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((0, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 0))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (-3, 1, 0, -1)$ e la proiezione del vettore $v = (2, 0, 7, -3)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = \sqrt{11}$, $v_w = \left(\frac{9}{11}, -\frac{3}{11}, 0, \frac{3}{11}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -10+k & 7-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & k-1 & 2k-3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq \frac{5}{2}$ **(pt.5)**

- posto $k = 1$, una matrice D diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_1. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((3, 1, 0), (-2, 0, 1), (1, 0, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_1 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k+1 & 1 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = -6, k = 2, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_{-6} = \{(\alpha, 2\alpha - 14, -5 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(\alpha, 2\alpha - 14, 3 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = -6$, si indichi una base B della copertura lineare di S_{-6} e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1, 2, -1), (0, -14, -5))$, $B' = ((1, 2, -1), (\frac{23}{6}, -\frac{19}{3}, -\frac{53}{6}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2k+2 & 0 \\ 4-k & 5 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = -2b, c = -3b, d = -b-3, b \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 4$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x+y = 0 = z+t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (-2, 2, -3, 3)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^tX_u = (-2, -3)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (-3, 1, 0, -1)$ e la proiezione del vettore $v = (-1, 0, 6, 2)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = \sqrt{11}$, $v_w = \left(-\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, 0, -\frac{1}{11}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & k-5 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1+2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.5)**

- posto $k = 1$, una matrice D diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_1. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_1 non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k+1 & 1 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = -4, k = 0, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_0 = \{(\alpha, 2\alpha - 2, 1 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_{-4} = \{(\alpha, 2\alpha - 2, -3 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = -4$, si indichi una base B della copertura lineare di S_{-4} e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1, 2, -1), (0, -2, -3))$, $B' = ((1, 2, -1), (\frac{1}{6}, -\frac{5}{3}, -\frac{19}{6}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-2 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid b = 2a, c = 4a, d = a - 2, a \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 2$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = 3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid 3x - y = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (3, 9, 3, -3)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, 3, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^t X_u = (3, 3)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((-3, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (2, 2, -1, 0)$ e la proiezione del vettore $v = (0, 7, 1, 15)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = 3$, $v_w = \left(\frac{26}{9}, \frac{26}{9}, -\frac{13}{9}, 0\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -3 & 13+k & 3-k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 3+2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -3$ **(pt.5)**

- posto $k = -1$, una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_{-1}. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((1, 0, 1), (0, 1, -3), (1, 0, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_{-1} non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k+1 & 1 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_k X = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = -5, k = 1, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_k X = B_k$;

  Risposta $S_1 = \{(\alpha, 2\alpha - 2, 2 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_{-5} = \{(\alpha, 2\alpha - 2, -4 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = -5$, si indichi una base B della copertura lineare di S_{-5} e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1, 2, -1), (0, -2, -4))$, B è già una base ortogonale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2k+6 & 4 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2b, c = b, d = 4b - 1, b \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 3$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = -3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid 2x - y = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (1, 2, -3, 3)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^tX_u = (1, -3)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (2, 2, -1, 0)$ e la proiezione del vettore $v = (0, 7, 15, 1)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = 3$, $v_w = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, 0\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -8+k & 5-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & 1+2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq \frac{1}{2}$ **(pt.5)**

- posto $k = -1$, una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_{-1}. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((3, 1, 0), (-2, 0, 1), (1, 0, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_{-1} non è simmetrica. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 02/11/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k-1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k per cui il sistema $A_kX = B_k$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k = \pm 4, \infty^1$ soluzioni **(pt.4)**

- nei casi in cui il sistema è compatibile, l'insieme S_k delle soluzioni di $A_kX = B_k$;

  Risposta $S_{-4} = \{(\alpha, 2\alpha - 14, -5 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $S_4 = \{(\alpha, 2\alpha - 14, 3 - \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- posto $k = -4$, si indichi una base B della copertura lineare di S_{-4} e la si ortogonalizzi rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

  Risposta $B = ((1, 2, -1), (0, -14, -5))$, $B' = ((1, 2, -1), (\frac{23}{6}, -\frac{19}{3}, -\frac{53}{6}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$A = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2k-2 & 0 \\ 2-k & 5 \end{pmatrix}\right], \quad B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = -2b, c = -3b, d = -b - 3, b \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali $v \in \mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 2$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali $\dim(\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)) = 1$.

  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo sia $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid y - 4x = 0 = z + t\}$. Si determinino:

- la dimensione di U, una sua base B_U e le componenti di $u = (1, 4, 4, -4)$ rispetto a B_U;

  Risposta $\dim U = 2$, $B_U = ((1, 4, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, ${}^tX_u = (1, 4)$ **(pt.3)**

- una base $B_{U^\perp}$ del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B_{U^\perp} = ((-4, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

- la norma del vettore $w = (2, 2, -1, 0)$ e la proiezione del vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ lungo w.

  Risposta $||w|| = 3$, $v_w = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & k-3 & k+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 5+2k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2$ **(pt.5)**

- posto $k = -1$, una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si scriva una base B di autovettori di A_{-1}. La base B' ottenuta ortonormalizzando B è ancora una base di autovettori? (Motivare la risposta)

  Risposta $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (2, 1, 0))$, B' non è di autovettori perchè A_{-1} non è simmetrica. **(pt.3)**