1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I appello - 25.01.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$, si studi la mutua posizione del piano $\alpha : kx + z = 1$ e della retta $r : \begin{cases} x + kz = 1 \\ y = k \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq \pm 1$: α ed r sono incidenti;
$k = 1$: r appartiene ad α; $k = -1$: r ed α sono paralleli e disgiunti. **(pt.4)**

Posto $k = 2$, si determini la proiezione ortogonale di r su α.

Risposta $\begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di α ortogonale a r e passante per $A = (0, 1, 1)$

Risposta $\begin{cases} x + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(1 + a, 2 + a, a, b) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B;

  Risposta B=((1,2,0,0),(1,1,1,0),(0,0,0,1)), $B' = ((1, 2, 0, 0), (2/5, -1/5, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**

- le componenti di $v = (12, 21, 3, 7)$ in B';

  Risposta (54/5,3,7) **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

  Risposta L(((-2,1,1,0))) **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 + 4xy - 4y = 0$. Si riconosca $\mathcal{C}$ e la si studi determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro, assi e vertici.

Risposta $\mathcal{C}$ è una parabola: centro $C_\infty = [(2, -1, 0)]$, asse: $a : 5x + 10y - 4 = 0$, vertice $V = (12/25, 4/25)$ **(pt.3)**

Si determinino il polo P_∞ di $r : x + 2y = 0$ ed equazioni cartesiane delle tangenti condotte da P_∞ a $\mathcal{C}$.

Risposta $[(1, 0, 0)]$, $t_1 : y = 0$, $t_2 : x_3 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 9 \\ 0 & -3 & 9 & -9 \end{pmatrix}$.

Risposta $S = \{(0, 3a, 3a, 2a) \in \mathbb{R}^4,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} = {}^t XAX = 0$ e si determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Si tratta di un cono quadrico con vertice $V = (0, 3/2, 3/2)$ **(pt.3)**

Si studino le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : x - 2z + 3 = 0$.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: ellisse, $\mathcal{Q} \cap \beta = r_1 \cup r_2$ dove $r_1 : \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ $r_2 : \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ 2y - 3 = 0 \end{cases}$ **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I appello - 25.01.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$, si studi la mutua posizione del piano $\alpha : (k-1)y+z=1$ e della retta $r : \begin{cases} ky+kz=2 \\ 2x=k-1 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 0,2$: α ed r sono incidenti;
$k=2$: r appartiene ad α; $k=0$: r non esiste. **(pt.4)**

Posto $k=3$, si determini la proiezione ortogonale di r su α.

Risposta $\begin{cases} 2y+z=1 \\ x=1 \end{cases}$ **(pt.2)**

Posto $k=-1$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di α ortogonale a r e passante per $A=(1,2,3)$

Risposta $\begin{cases} 2y-z=-1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Dato $A=\{(a,1+b,1+a,1-b)\in\mathbb{R}^4, a,b\in\mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B;

  Risposta B=((0,1,1,1),(1,0,1,0),(0,1,0,-1)), $B'=((0,1,1,1),(1,-1/3,2/3,-1/3),(0,1,0,-1))$ **(pt.2)**
- le componenti di $v=(15,15,17,-11)$ in B';

  Risposta (2,15,13) **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

  Risposta L(((2,1,-2,1))) **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C}: x^2+y^2+2xy-2x=0$. Si riconosca $\mathcal{C}$ e la si studi determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro, assi e vertici.

Risposta $\mathcal{C}$ è una parabola con centro $C_\infty=[(1,-1,0)]$, asse: $a: 2x+2y-1=0$ e vertice $V=(1/8,3/8)$ **(pt.3)**

Si determinino il polo P_∞ di $r: x+y=0$ ed equazioni cartesiane delle tangenti condotte da P_∞ a $\mathcal{C}$.

Risposta $[(0,1,0)]$, $t_1: x=0$, $t_2: x_3=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema $AX=0$, dove $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Risposta $S=\{3a,0,0,-a)\in\mathbb{R}^4,\ a\in\mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}={}^tXAX=0$ e si determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Si tratta di un cono quadrico con vertice $V=(-3,0,0)$ **(pt.3)**

Si studino le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: x=0$ e $\beta: x-2z+3=0$.

Risposta $\mathcal{Q}\cap\alpha$: ellisse, $\mathcal{Q}\cap\beta=r_1\cup r_2$, dove $r_1: \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-\sqrt{13}iz=0 \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y+\sqrt{13}iz=0 \end{cases}$ **(pt.5)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I appello - 25.01.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$, si studi la mutua posizione del piano $\alpha : kx = k-1$ e della retta $r : \begin{cases}(k+1)y + kz = 1\\(k+1)x + z = 1\end{cases}$ al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 0, -1$: α ed r sono incidenti;
$k = 0$: α non esiste; $k = -1$: r non esiste. **(pt.4)**

Posto $k = 2$, si determini la proiezione ortogonale di r su α.

Risposta $\begin{cases}3y + 2z = 1\\x = 1/2\end{cases}$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di α ortogonale a r e passante per $A = (0, 0, 1)$

Risposta $\begin{cases}y - 2z = -2\\x = 0\end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(a, b, a - 1, 2) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B;

  Risposta B=((1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,-1,2)), $B' = ((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1/2, 0, -1/2, 2))$ **(pt.2)**

- le componenti di $v = (30, 30, 20, 20)$ in B';

  Risposta (25,30,10) **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

  Risposta L(((-2,0,2,1))) **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy + 4y = 0$. Si riconosca $\mathcal{C}$ e la si studi determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro, assi e vertici.

Risposta $\mathcal{C}$ è una parabola con centro in $C_\infty = [(1, 1, 0)]$, asse: $a : x - y = 1$ e vertice $V = (3/4, -1/4)$ **(pt.3)**

Si determinino il polo P_∞ di $r : x - y = 0$ ed equazioni cartesiane delle tangenti condotte da P_∞ a $\mathcal{C}$.

Risposta $[(1, 0, 0)]$, $t_1 : y = 0$, $t_2 : x_3 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$, dove $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\2 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

Risposta $S = \{3a, -3a, 0, 3a) \in \mathbb{R}^4,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} =^t XAX = 0$ e si determinino gli eventuali punti doppi.

Risposta Si tratta di un cono quadrico con vertice $V = (1, -1, 0)$ **(pt.3)**

Si studino le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : x + y = 0$.

Risposta $\mathcal{Q} \cap \alpha$: ellisse (circonferenza con centro $C = (0, 1, 0)$ e raggio $r = \sqrt{3}$), $\mathcal{Q} \cap \beta = r_1 \cup r_2$ dove $r_1 : \begin{cases}x + y = 0\\\sqrt{2}x - z = \sqrt{2}\end{cases}$, $r_2 : \begin{cases}x + y = 0\\\sqrt{2}x + z = -\sqrt{2}\end{cases}$ **(pt.5)**